Questão 1. Resolva o problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathbb{R}, && (1)\\ u(0,t) &= A, \quad u(L,t) = B, \quad t > 0, && (2)\\ u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < L, && (3) \end{aligned}$$

onde A e B são constantes, reduzindo-o, através de uma mudança de variável dependente u, a um problema da equação da onda com condições de contorno homogêneas.

Questão 2. Usando a mesma estratégia do exercício anterior, resolva o problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathbb{R}, && (4)\\ u(0,t) &= A + Bt, \quad u(L,t) = C + Dt, \quad t > 0, && (5)\\ u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < L. && (6) \end{aligned}$$

onde A, B, C e D são constantes.

Questão 3. Use o método de Fourier para resolver os problemas

a)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathbb{R}, && (7)\\ u_x(0,t) &= 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0, && (8)\\ u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < L, && (9) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathbb{R}, && (10)\\ u(0,t) &= 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0, && (11)\\ u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < L, && (12) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} - \alpha u, \quad \text{em } \mathbb{R}, \quad \alpha > 0 && (13)\\ u(0,t) &= 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0, && (14)\\ u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < L, && (15) \end{aligned}$$

Questão 4. Escreva a solução da equação da onda com condições de contorno homogêneas no caso em que $g(x) = 0$ e

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{a}, & \text{para } 0 \le x \le a,\\ \dfrac{h(x-L)}{(a-L)}, & \text{para } a \le x \le L, \end{cases} \qquad (16)$$

onde $0 < a < L$ e $h > 0$.

Questão 5. Resolva os outros três casos da solução da equação de Laplace em um retângulo, isto é, com as seguintes condições de contorno:

(i) $u(x,b) = f_0(x)$, $u(x,0) = u(0,y) = u(a,y) = 0$;

(ii) $u(0,y) = f_1(y)$, $u(x,0) = u(x,b) = u(a,y) = 0$;

(iii) $u(a,y) = f_2(y)$, $u(x,0) = u(x,b) = u(0,y) = 0$.

Questão 6. Encontre a solução, via separação de variáveis, do PVIF abaixo

$$\begin{aligned} u_t &= 100u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, && (17) \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad t > 0, && (18) \\ u(x,0) &= \sin(2\pi x) - \sin(5\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1, && (19) \end{aligned}$$

Questão 7. Encontre a solução, via separação de variáveis, do PVIF abaixo

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2, && (20) \\ u(0,t) &= u(2,t) = 0, \quad t > 0, && (21) \\ u(x,0) &= 2\sin(\frac{\pi x}{2}) - \sin(\pi x) + 4\sin(2\pi x) \quad 0 \leq x \leq 2, && (22) \end{aligned}$$

Questão 8. Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com $50cm$ de comprimento, isolada nos lados, inicialmente a uma temperatura de 20^oC em toda a barra e cujas extremidades são mantidas a zero grau para todo tempo.