Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01354 - Cálculo e Geometria Analítica II-A
Prof. Felipe C. Minuzzi
Prova Área 2 - 31/10/2025 - Turma D2

Nome: ______________________________ Cartão: ______________

| Q.1 | Q.2 | Q.3 | Q.4 | Q.5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**Questão 1:** Considere a integral

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^4 2x \sin(y^2)\ dy\ dx \tag{1}$$

a) Esboce a região de integração no plano $xy$;

b) Calcule o valor da integral.

**Solução:**

A integral interna é dada em relação a $y$, envolvendo $\sin(y^2)$. Como $\int \sin(y^2)dy$ não possui primitiva expressa em funções elementares, é necessário inverter a ordem de integração.

**Limites originais (Tipo I):**

- $0 \leq x \leq 2$
- $x^2 \leq y \leq 4$

A região $D$ é delimitada inferiormente pela parábola $y = x^2$ e superiormente pela reta $y = 4$. Ao inverter para Tipo II ($dxdy$), observamos que $y$ varia de 0 a 4 e, para um $y$ fixo, $x$ varia de 0 até a curva $x = \sqrt{y}$.

**Novos limites (Tipo II):**

- $0 \leq y \leq 4$
- $0 \leq x \leq \sqrt{y}$

Reescrevendo a integral na nova ordem:

$$I = \int_0^4 \left[ \int_0^{\sqrt{y}} 2x \sin(y^2)\, dx \right] dy$$

**Passo 1: Integral interna (em $x$)** Como $\sin(y^2)$ é constante em relação a $x$:

$$\int_0^{\sqrt{y}} 2x \sin(y^2)\, dx = \sin(y^2) \cdot \left[x^2\right]_0^{\sqrt{y}} = \sin(y^2) \cdot (y - 0) = y \sin(y^2)$$

**Passo 2: Integral externa (em $y$)**

$$I = \int_0^4 y \sin(y^2)\, dy$$

Usamos a substituição:

$$u = y^2 \implies du = 2y\, dy \implies \frac{1}{2} du = y\, dy$$

Mudança dos limites:

- Se $y = 0 \implies u = 0$
- Se $y = 4 \implies u = 16$

$$I = \int_0^{16} \sin(u) \cdot \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2}\left[-\cos(u)\right]_0^{16}$$

$$I = \frac{1}{2}\left(-\cos(16) - (-\cos(0))\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(16))$$

---

**Questão 2:** Calcule a integral tripla da função $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre $E$, onde $E$ é a porção do espaço que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.

**Solução:** Utilizaremos **Coordenadas Cilíndricas**, dada a simetria da região e a função integranda.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad dV = r\, dz\, dr\, d\theta$$

A função a ser integrada torna-se: $f(x, y, z) = \sqrt{r^2} = r$.

**Limites de Integração:**

- O cilindro tem raio 4, logo $0 \le r \le 4$.
- A volta é completa, logo $0 \le \theta \le 2\pi$.
- A altura é delimitada pelos planos, logo $-5 \le z \le 4$.

Montagem da integral:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_{-5}^4 (r) \cdot r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_{-5}^4 r^2\, dz\, dr\, d\theta$$

**Cálculo:** 1. Em $z$: $\int_{-5}^4 dz = 4 - (-5) = 9$. 2. Em $r$: $\int_0^4 9r^2\, dr = 9\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^4 = 3(4^3) = 3(64) = 192$. 3. Em $\theta$: $\int_0^{2\pi} 192\, d\theta = 192(2\pi) = 384\pi$.

**Resultado:** $384\pi$

---

**Questão 3:** Considere a seguinte integral

$$I = \iint_R \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dA$$

onde $R$ é a região no plano $xy$ que está **fora** do círculo $x^2 + y^2 = 4$ e **dentro** do círculo $x^2 + y^2 = 4y$.

a) Defina os limites de integração da região usando coordenadas polares;

b) Calcule a integral usando os limites obtidos acima (ou seja, via coordenadas polares).

**Solução:**

**a)**

A região está entre o círculo centrado na origem ($r = 2$) e o círculo deslocado ($r = 4\sin\theta$). Interseção: $2 = 4\sin\theta \implies \sin\theta = 1/2 \implies \theta \in [\pi/6, 5\pi/6]$. Limites: $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$ e $2 \le r \le 4\sin\theta$.

**b)**

Função: $\frac{x^2}{r} = \frac{r^2\cos^2\theta}{r} = r\cos^2\theta$.

$$I = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2\theta \left[\int_2^{4\sin\theta} r^2 dr\right] d\theta = \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos^2\theta(64\sin^3\theta - 8)d\theta$$

Separamos em duas partes: $I = A - B$.

**Parte A:** $\frac{64}{3}\int \sin^3\theta\cos^2\theta d\theta$. Substituindo $u = \cos\theta$ e usando $\sin^3\theta = (1-\cos^2\theta)\sin\theta$:

$$A = \frac{64}{3}\int_{\sqrt{3}/2}^{-\sqrt{3}/2} u^2(1-u^2)(-du) = \frac{64}{3}\cdot\frac{11\sqrt{3}}{80} = \frac{44\sqrt{3}}{15}$$

**Parte B:** $\frac{8}{3}\int \cos^2\theta d\theta$. Usando $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$:

$$B = \frac{8}{3}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{8\pi}{9} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

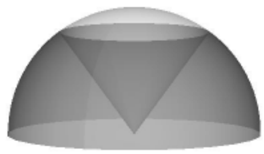
**Resultado Final** $(A - B)$**:**

$$I = \frac{44\sqrt{3}}{15} - \left(\frac{8\pi}{9} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{44\sqrt{3}+10\sqrt{3}}{15} - \frac{8\pi}{9} = \frac{18\sqrt{3}}{5} - \frac{8\pi}{9}$$

---

**Questão 4:**

a) Seja $G$ a porção da bola $x^2+y^2+z^2 \leq 9$, limitada acima pelo cone $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$ e abaixo pelo plano $xy$, representado pela parte mais escura da figura. Escreva, **sem calcular**, o volume da região $G$ como uma integral tripla em coordenadas esféricas.



b) Considere o sólido $S$ situado dentro da folha de cone de equação $z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ e entre as superfícies esféricas de equações $x^2+y^2+z^2 = 4$ e $x^2+y^2+z^2 = 9$. Considerando que a densidade em cada ponto $P$ do sólido $S$ seja dada pelo quadrado da distância de $P$ até a origem, expresse, **sem calcular**, a massa de $S$ como uma integral tripla iterada em coordenadas esféricas.

**a)**

**Análise das Superfícies:**

- **Esfera:** $x^2+y^2+z^2 \leq 9 \implies \rho \leq 3$.
- **Cone (Teto):** $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$.

$$\rho\cos\phi = \sqrt{3}(\rho\sin\phi) \implies \tan\phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \phi = \frac{\pi}{6}$$

- **Plano xy (Chão):** $z = 0 \implies \phi = \frac{\pi}{2}$.

A região está entre o cone e o plano $xy$.

$$V = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^3 \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

- **Cone:** $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}$.

$$\tan\phi = \sqrt{3} \implies \phi = \frac{\pi}{3}$$

Como é "dentro" do cone (em torno do eixo z): $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$.

- **Esferas:** $x^2+y^2+z^2 = 4$ $(\rho = 2)$ e $x^2+y^2+z^2 = 9$ $(\rho = 3)$.
- **Densidade:** $\delta(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = \rho^2$.

**b)**

A integral de massa é $\iiint \delta\, dV$:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_2^3 (\rho^2) \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Simplificando o integrando:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_2^3 \rho^4 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

---

**Questão 5:** Calcule

$$\oint_C \vec{F} \cdot dr \tag{2}$$

onde $C$ é o círculo $x^2 + y^2 = 9$ orientado no sentido anti-horário e $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$.

Utilizaremos o **Teorema de Green**, pois $C$ é uma curva fechada simples e $\vec{F}$ é diferenciável em todo o $\mathbb{R}^2$.

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

- $P(x,y) = x^2 - y^2 \implies \frac{\partial P}{\partial y} = -2y$
- $Q(x,y) = x \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$

O integrando será:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-2y) = 1 + 2y$$

A região $D$ é o disco de raio 3 ($x^2 + y^2 \leq 9$). Usando coordenadas polares:

$$0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$y = r\sin\theta, \quad dA = rdrd\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (1 + 2r\sin\theta) \cdot r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (r + 2r^2 \sin\theta) \, dr \, d\theta$$

Integrando em relação a $r$:

$$\int_0^3 (r + 2r^2\sin\theta) dr = \left[ \frac{r^2}{2} + \frac{2r^3}{3}\sin\theta \right]_0^3 = \frac{9}{2} + \frac{2(27)}{3}\sin\theta = \frac{9}{2} + 18\sin\theta$$

Integrando em relação a $\theta$:

$$I = \int_0^{2\pi} \left( \frac{9}{2} + 18\sin\theta \right) d\theta$$

Separando os termos:

$$\int_0^{2\pi} \frac{9}{2} d\theta = \frac{9}{2}(2\pi) = 9\pi$$

$$\int_0^{2\pi} 18\sin\theta d\theta = 18[-\cos\theta]_0^{2\pi} = 18(-1 - (-1)) = 0$$

Logo, a resposta final é $9\pi$