Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01354 - Cálculo e Geometria Analítica II-A
Prof. Felipe C. Minuzzi
Prova Área 1 - 15/09/2025 - Turma D2

Nome: ______________________________ Cartão: ______________

Q.1	Q.2	Q.3	Q.4	Q.5	Total

Questão 1: Considere o ponto $A = (4, 1, 2)$ e a reta

$$r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2t \\ z = 9 - t \end{cases} \tag{1}$$

a) obtenha uma equação do plano π que contém o ponto A e é perpendicular à reta r;

b) encontre o ponto de interseção B entre o plano π e a reta r;

c) ache as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e B.

Resolução:

a) Um plano perpendicular a r tem normal paralela ao vetor diretor de r, que é $\vec{v} = (1, -2, -1)$. Logo, a equação do plano é

$$\pi : \ \vec{v} \cdot \big((x, y, z) - A\big) = 0.$$

Isto é,

$$(1, -2, -1) \cdot (x - 4, y - 1, z - 2) = 0,$$

o que resulta em

$$\boxed{x - 2y - z = 0}.$$

b) Para determinar o ponto $B = \pi \cap r$, substituímos as equações da reta no plano:

$$(3 + t) - 2(-2t) - (9 - t) = -6 + 6t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

Assim, o ponto de interseção é

$$B = (3 + 1, \ -2, \ 9 - 1) = (4, -2, 8).$$

c) A reta que passa por A e B tem vetor diretor $\overrightarrow{AB} = (0, -3, 6)$. Portanto, uma forma paramétrica é

$$\boxed{x = 4, \quad y = 1 - 3s, \quad z = 2 + 6s}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Questão 2: Considere a função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ e o ponto $P = (4, 3)$ do domínio de f.

a) Existe alguma restrição para o domínio desta função?

b) Apresente uma equação para a curva de nível de f que passa por P;

c) Obtenha um vetor na direção e sentido do qual f cresce mais rapidamente a partir do ponto P;

d) Encontre a taxa de variação de f no ponto P na direção e sentido do vetor $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

Resolução:

Considere $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ e $P = (4, 3)$.

a) O domínio é dado pela condição do radicando ser não-negativo:

$$x^2 + y^2 - 9 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 \geq 9}.$$

b) Avaliando em P, temos

$$f(P) = \sqrt{16 + 9 - 9} = 4.$$

A curva de nível que passa por P satisfaz

$$f(x, y) = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 9 = 16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 = 25}.$$

c) A direção de crescimento mais rápido é dada pelo gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}} \right).$$

No ponto $P = (4, 3)$, temos $\sqrt{x^2 + y^2 - 9} = 4$, portanto

$$\boxed{\nabla f(P) = (1, \tfrac{3}{4})}.$$

d) Para a derivada direcional em P na direção de $\vec{v} = (4, -3)$, primeiro normalizamos o vetor:

$$\|\vec{v}\| = 5 \quad \Rightarrow \quad \hat{u} = \left(\tfrac{4}{5}, -\tfrac{3}{5}\right).$$

Assim,

$$D_{\hat{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \hat{u} = (1, \tfrac{3}{4}) \cdot (\tfrac{4}{5}, -\tfrac{3}{5}) = \tfrac{7}{20}.$$

Portanto,

$$\boxed{D_{\hat{u}} f(P) = \tfrac{7}{20} = 0,35}.$$

Questão 3: Sobre a função $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$, faça o que se pede:

a) Calcule as derivadas parciais f_x e f_y da função;

b) Calcule as derivadas parciais de segunda ordem de f;

c) Encontre os pontos críticos, se existirem, da função;

d) Localize todos os máximos e mínimos relativos, assim como pontos de sela, se houver, da função.

Resolução:

Seja $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$.

a) As derivadas parciais de primeira ordem são

$$f_x = y - 3x^2, \qquad f_y = x - 2y.$$

b) As derivadas de segunda ordem são

$$f_{xx} = -6x, \qquad f_{yy} = -2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 1.$$

c) Para os pontos críticos, resolvemos $f_x = 0$ e $f_y = 0$:

$$y = 3x^2, \qquad x = 2y.$$

Substituindo,

$$x = 2(3x^2) \quad \Rightarrow \quad x = 6x^2 \quad \Rightarrow \quad x(6x-1) = 0.$$

Portanto, $x = 0 \Rightarrow y = 0$, e $x = \frac{1}{6} \Rightarrow y = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}$. Logo, os pontos críticos são

$$\boxed{(0,0)} \quad \text{e} \quad \boxed{\left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{12}\right)}.$$

d) Para classificar, calculamos o determinante do Hessiano:

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

- No ponto $(0,0)$: $f_{xx} = 0,\ f_{yy} = -2,\ f_{xy} = 1$, então

$$D = 0 \cdot (-2) - 1 = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{ponto de sela}}.$$

- No ponto $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$: $f_{xx} = -1,\ f_{yy} = -2,\ f_{xy} = 1$, então

$$D = (-1)(-2) - 1 = 1 > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx} < 0,$$

portanto trata-se de um **máximo local**. O valor da função é

$$f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{72} - \frac{1}{216} - \frac{1}{144} = \frac{6-2-3}{432} = \frac{1}{432}.$$

Logo, o máximo local é $\boxed{\frac{1}{432}}$.

Questão 4: Um reservatório de formato cilíndrico possui raio variável $r(t)$ e altura variável $h(t)$. Sabe-se que o raio está aumentando a uma taxa de 0.2 m/min, enquanto a altura está diminuindo a uma taxa de 0.1 m/min. Qual é a taxa de variação do volume do reservatório no instante em que o raio mede $r = 5$ m e a altura mede $h = 10$ m.

Resolução:

O volume de um cilindro é dado por

$$V = \pi r^2 h.$$

Derivando em relação ao tempo t, aplicamos a **regra da cadeia**:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}.$$

Como

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2,$$

segue que

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi r h \cdot \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \cdot \frac{dh}{dt}.$$

Sabemos que $\dfrac{dr}{dt} = 0{,}2$ m/min e $\dfrac{dh}{dt} = -0{,}1$ m/min.
No instante em que $r = 5$ e $h = 10$, temos:

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi \cdot 5 \cdot 10 \cdot 0{,}2 + \pi \cdot 25 \cdot (-0{,}1),$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi(20 - 2{,}5) = 17{,}5\pi.$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = 17{,}5\,\pi \ \text{m}^3/\text{min}}.$$

Questão 5: Utilizando multiplicador de Lagrange, encontre as dimensões da caixa de faces retangulares, com $36\,cm^3$ de volume e de custo mínimo sabendo que o material para o fundo e a tampa custa R$4,00 por cm^2 e o material para os lados custa R$3,00 por cm^2. Qual é esse custo mínimo?

Resolução

Uma caixa retangular com dimensões $x, y, z > 0$ e volume fixo $xyz = 36$ cm^3.

O custo total é dado por:

$$\text{Custo} = \underbrace{2xy}_{\text{tampo+fundo}} \cdot 4 + \underbrace{(2xz + 2yz)}_{\text{lados}} \cdot 3 = 8xy + 6z(x+y).$$

Aplicando multiplicadores de Lagrange para minimizar $C(x,y,z) = 8xy + 6z(x+y)$ sujeito a $xyz = 36$, obtemos as equações

$$\begin{cases} 8y + 6z - \lambda yz = 0, \\ 8x + 6z - \lambda xz = 0, \\ 6x + 6y - \lambda xy = 0, \\ xyz = 36. \end{cases}$$

Pela simetria, $x = y = a$. Da terceira equação:

$$12a - \lambda a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \tfrac{12}{a}.$$

Substituindo em outra equação, resulta em

$$8a + 6z - \frac{12}{a} \cdot az = 8a - 6z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \tfrac{4}{3}a.$$

Usando a restrição do volume:

$$a^2 z = 36 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{4}{3}a^3 = 36 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad a = 3.$$

Portanto, $x = y = 3$ e $z = 4$.

O custo mínimo é

$$C = 8(3 \cdot 3) + 6 \cdot 4(3+3) = 72 + 144 = 216.$$

Logo,

$$\boxed{x = y = 3 \text{ cm}, \quad z = 4 \text{ cm}, \quad C_{\min} = 216}.$$
