NOTAS DE AULA

1 Integração de várias variáveis

1.1 Coordenadas polares:

Exemplo 1: Área de um Círculo Unitário:

Calcular a área do disco unitário $\mathcal{R}$, definida por $x^2 + y^2 \leq 1$. A integral dupla em coordenadas cartesianas é:

$$A = \iint_{\mathcal{R}} dA = \iint_{\mathcal{R}} 1 \, dx \, dy$$

Isto levaria à integral:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \, dx$$

Esta integral requer substituições trigonométricas complexas para ser resolvida.

Aplicamos a transformação para coordenadas polares:

- $x^2 + y^2 = r^2$
- $dA = dx \, dy = r \, dr \, d\theta$ (Jacobiano)

A região $\mathcal{R}$ no plano xy é descrita pelos limites:

- $0 \leq r \leq 1$
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Substituindo na integral:

$$A = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} r \, dr \, d\theta$$

Integral Interna (em relação a r)

$$\int_{0}^{1} r \, dr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Integral Externa (em relação a θ)

$$A = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} \, d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi - 0) = \pi$$

O valor da área do disco unitário é π.

Exemplo 2: Integral de Gauss (sobre $\mathbb{R}^2$)

Calcular a integral dupla sobre todo o plano $\mathbb{R}^2$:

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

Em coordenadas cartesianas, isto é a multiplicação de duas integrais Gaussianas:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy$$

A primitiva $\int e^{-x^2} dx$ não pode ser expressa em termos de funções elementares.

Utilizamos a transformação polar: $x^2 + y^2 = r^2$ e o elemento de área $dA = r \, dr \, d\theta$. A região $\mathbb{R}^2$ (todo o plano) é definida pelos limites:

- $0 \leq r < \infty$
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$

A integral transforma-se em:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r\, dr\, d\theta$$

Cálculo da Integral Interna (em relação a r) Usamos a substituição $u = r^2$, de modo que $r\, dr = \frac{1}{2}\, du$.

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r\, dr = \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2}\left[-e^{-u}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\lim_{u\to\infty}(-e^{-u})}_{=\,0} - \underbrace{(-e^{-0})}_{=\,-1}\right) = \frac{1}{2}$$

Cálculo da Integral Externa (em relação a θ)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi - 0) = \pi$$

1.2 Integração tripla - coordenadas cartesianas.

Assim como a integral simples (cálculo de área) e a integral dupla (cálculo de volume), a integral tripla estende esse conceito para uma dimensão a mais.

A integral tripla,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dV,$$

é usada para calcular a integral de uma função de três variáveis, $f(x, y, z)$, sobre uma região sólida tridimensional Ω no espaço. A integral tripla é uma extensão da integral dupla. Seja $f(x, y, z)$ uma função contínua sobre uma região sólida fechada e limitada Ω no espaço tridimensional.

1. **Partição da Região:** Dividimos a região ω em n pequenos sub-retângulos (ou paralelepípedos) B_k.
2. **Volume Elementar:** Definimos ΔV_k como o volume do k-ésimo sub-retângulo $\mathcal{B}_k$.
3. **Ponto de Amostragem:** Escolhemos um ponto (x_k^*, y_k^*, z_k^*) arbitrário dentro de cada $\mathcal{B}_k$.
4. **Soma de Riemann:** Formamos a soma de Riemann tripla:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

A **Integral Tripla** de f sobre Ω é definida como o limite dessa soma de Riemann, à medida que o número de sub-retângulos n tende ao infinito e o maior volume ΔV_k tende a zero:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

A integral tripla possui as seguintes interpretações físicas:

1. **Volume:** Se $f(x, y, z) = 1$, a integral calcula o **Volume** da região Ω:

$$V = \iiint_{\Omega} 1\, dV$$

2. **Massa:** Se $f(x, y, z) = \rho(x, y, z)$ é a função de **densidade de massa** do sólido Ω, a integral calcula a **Massa Total**:

$$\text{Massa} = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)\, dV$$

3. Em **coordenadas cartesianas**, o diferencial de volume dV é o produto dos diferenciais de comprimento, e pode ser escrito em seis ordens diferentes, como:

$$dV = dx\, dy\, dz = dy\, dz\, dx = dz\, dx\, dy$$

Integrais Triplas em Caixas Retangulares

A caixa retangular $\mathcal{B}$ é a região sólida mais simples, onde todos os limites são constantes:

$$\mathcal{B} = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad p \leq z \leq q\}$$

A integral tripla sobre $\mathcal{B}$ é escrita como:

$$\iiint_{\mathcal{B}} f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Teorema 1 (Teorema de Fubini para Integrais Triplas em Caixas) *Se a função $f(x, y, z)$ é **contínua** sobre a caixa retangular $\mathcal{B}$, definida por:*

$$\mathcal{B} = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad p \leq z \leq q\}$$

*então a integral tripla de f sobre $\mathcal{B}$ pode ser calculada como uma integral iterada em **qualquer uma das seis ordens possíveis** de integração. Por exemplo:*

$$\iiint_{\mathcal{B}} f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Exemplo 1: Cálculo da Integral de $f(x, y, z) = xz^2 + y$

Vamos calcular a integral tripla da função $f(x, y, z) = xz^2 + y$ sobre a caixa retangular $\mathcal{B}$ definida por:

$$\mathcal{B} = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1\}$$

A integral a ser calculada é:

$$I = \iiint_{\mathcal{B}} (xz^2 + y)\, dV = \int_1^2 \int_0^1 \int_0^1 (xz^2 + y)\, dz\, dy\, dx$$

Integrar em Relação a z

$$\begin{aligned} \int_0^1 (xz^2 + y)\, dz &= \left[x\frac{z^3}{3} + yz\right]_{z=0}^{z=1} \\ &= \left(x\frac{1^3}{3} + y(1)\right) - (0) \\ &= \frac{x}{3} + y \end{aligned}$$

Integrar em Relação a y

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{3} + y\right) dy = \left[\frac{x}{3}y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \left(\frac{x}{3}(1) + \frac{1^2}{2}\right) - (0) = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$$

Integrar em Relação a x

$$\int_1^2 \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{6} + \frac{x}{2}\right]_{x=1}^{x=2}$$

$$\left(\frac{2^2}{6} + \frac{2}{2}\right) - \left(\frac{1^2}{6} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{6} + 1\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3} + 1\right) - \left(\frac{4}{6}\right) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \mathbf{1}$$

Exemplo 2: Integral Tripla Separada de $f(x, y, z) = x\cos(y)e^z$

Calcularemos a integral tripla da função $f(x, y, z) = x\cos(y)e^z$ sobre a caixa retangular $\mathcal{B}$ definida por:

$$\mathcal{B} = \left\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq z \leq 1\right\}$$

Aplicação do Teorema de Fubini

Como a função é separável ($f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$), separamos a integral:

$$I = \left(\int_0^1 x\, dx\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\, dy\right)\left(\int_{-1}^1 e^z\, dz\right)$$

Resolução de I_x

$$I_x = \int_0^1 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Resolução de I_y

$$I_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\, dy = [\sin(y)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

Resolução de I_z

$$I_z = \int_{-1}^1 e^z\, dz = [e^z]_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e}$$

Logo

$$I = I_x \cdot I_y \cdot I_z = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1) \cdot \left(e - \frac{1}{e}\right) = \mathbf{\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)}$$

Assim, como nas integrais duplas, podemos integrar uma função $f(x, y, z)$ em regiões mais gerais, especialmente quando a variação em z é entre duas superfícies no espaço. Nesse caso, podemos seguir a ordem de integração ou reduzir o problema a uma integral dupla, do tipo:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_1=2(x,y)} f(x, y, z)dz\right] dA \tag{1}$$

Exemplo 3: Calcular a integral tripla da função $f(x, y, z) = z$ sobre a região Ω, onde Ω é a cunha no primeiro octante seccionada do cilindro sólido $x^2 + z^2 \leq 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 0$.

Primeiro, vamos visualizar e definir matematicamente a região Ω.

- **Primeiro octante**: Isso significa que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$.
- **Cilindro sólido**: A região está dentro do cilindro $x^2 + z^2 \leq 1$. Como estamos no primeiro octante, $x \geq 0$ e $z \geq 0$, a base do sólido no plano xz é um quarto de círculo de raio 1.
- **Planos**: A região é delimitada pelos planos $x = 0$ e $y = x$. Como estamos no primeiro octante ($x \geq 0$ e $y \geq 0$), a condição $y = x$ implica que y está "acima" do plano $y = 0$ e "abaixo" do plano $y = x$. Isso nos dá a restrição $0 \leq y \leq x$.

Juntando tudo, a região Ω pode ser descrita pelas seguintes desigualdades:

- $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2}$ (do cilindro, no primeiro octante)
- $0 \leq y \leq x$ (dos planos)
- $0 \leq x \leq 1$ (do cilindro)

A integral que queremos calcular é:

$$\iiint_\Omega z\, dV$$

Com os limites definidos, a integral tripla se torna:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x z\, dy\, dz\, dx$$

Vamos resolver a integral de dentro para fora.

Integrar em relação a y

$$\int_0^x z\, dy = z \int_0^x 1\, dy = z[y]_0^x = z(x - 0) = xz$$

Integrar o resultado em relação a z Agora, substituímos o resultado na integral do meio:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xz\,dz = x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} z\,dz$$

$$= x\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = x\left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^2}{2} - 0\right)$$

$$= x\left(\frac{1-x^2}{2}\right) = \frac{x-x^3}{2}$$

Integrar o resultado final em relação a x Finalmente, calculamos a integral externa:

$$I = \int_0^1 \frac{x-x^3}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x-x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

Avaliando nos limites $x = 1$ e $x = 0$:

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right) - (0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$