Instituto de MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA UFRGS

**Universidade Federal do Rio Grande do Sul**
**Departamento de Matemática Pura e Aplicada**
**MAT01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A**
**Prof. Felipe C. Minuzzi**
**Prova 2 - Turma D3**

Nome: _____ Cartão: _____

| Q.1 | Q.2 | Q.3 | Q.4 | Q.5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**Questão 1** ***(Valor 2,0)*****:** Analise as afirmações a seguir e julgue cada uma delas como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**):

( ) Se $F(x)$ e $G(x)$ são duas primitivas de uma mesma função contínua $f(x)$ em um intervalo aberto $I$, então existe uma constante real $C$ tal que $F(x) = G(x) + C$ para todo $x \in I$.

( ) Se $f$ é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, então necessariamente $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

( ) Se uma função $f$ é contínua em um intervalo $[a, b]$, então a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é sempre igual à área geométrica da região delimitada pelo gráfico de $f$, pelo eixo $x$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

( ) Se $f$ é uma função contínua e ímpar (isto é, $f(-x) = -f(x)$) para todo $x \in \mathbb{R}$, então a integral definida $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ para qualquer número real $a > 0$.

A sequência correta de preenchimento é: **( V ) , ( F ) , ( F ) , ( V )**.

- **Item 1 (Verdadeiro):** Por definição, se $F(x)$ e $G(x)$ são primitivas de $f(x)$, então $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Logo, pela linearidade da derivada, $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Como a derivada da diferença é nula em todo o intervalo aberto, o Corolário do Teorema do Valor Médio (TVM) garante que a função diferença deve ser constante. Portanto, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = C \implies F(x) = G(x) + C$.
- **Item 2 (Falso):** O fato de a integral definida resultar em zero significa apenas que a "área líquida" acumulada se anulou, isto é, as áreas acima e abaixo do eixo $x$ se cancelaram perfeitamente. Como contraexemplo clássico, tomemos a função $f(x) = \sin(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$. A integral $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$, contudo, a função assume diversos valores não nulos neste intervalo.
- **Item 3 (Falso):** A integral definida calcula a área sinalizada. Se o gráfico da função possuir subintervalos onde $f(x) < 0$ (abaixo do eixo $x$), a integral computará essas regiões com sinal negativo. Para se obter a área geométrica absoluta, seria estritamente necessário integrar o módulo da função, ou seja, $\int_a^b |f(x)|\,dx$.
- **Item 4 (Verdadeiro):** Esta é uma propriedade clássica de simetria. Sendo $f$ uma função ímpar, seu gráfico é simétrico em relação à origem. Isso implica que a região sob o gráfico no intervalo $[-a, 0]$ possui exatamente a mesma área geométrica que a região no intervalo $[0, a]$, mas com sinal oposto. Logo, ao efetuar a soma das partes na integral de $[-a, a]$, os valores se cancelam simetricamente resultando em zero.

---

**Questão 2** ***(Valor 4,0)*****:** Calcule as integrais indefinidas:

a) $\int x^2 \sin(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int t\sqrt{5t^2+9}\,dt$

d) $\displaystyle\int \sin(x)e^{\cos(x)}\,dx$

1. $\displaystyle\int x^2\sin(x)dx$

**Resolução:** Utiliza-se o método de integração por partes duas vezes ($\int u\,dv = uv - \int v\,du$).

- *Primeira aplicação:* Escolhe-se $u = x^2 \implies du = 2x\,dx$ e $dv = \sin(x)\,dx \implies v = -\cos(x)$.

$$\int x^2\sin(x)\,dx = -x^2\cos(x) - \int(-\cos(x))\cdot 2x\,dx = -x^2\cos(x) + \int 2x\cos(x)\,dx$$

- *Segunda aplicação:* Para resolver $\int 2x\cos(x)\,dx$, definimos $\tilde{u} = 2x \implies d\tilde{u} = 2\,dx$ e $d\tilde{v} = \cos(x)\,dx \implies \tilde{v} = \sin(x)$.

$$\int 2x\cos(x)\,dx = 2x\sin(x) - \int 2\sin(x)\,dx = 2x\sin(x) - (-2\cos(x)) = 2x\sin(x) + 2\cos(x)$$

Substituindo o resultado intermediário na equação principal, obtemos a solução geral:

$$\int x^2\sin(x)dx = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C$$

2. **Substituição Trigonométrica:** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$

**Resolução:** Dado o termo $\sqrt{9-x^2}$, convém a substituição $x = 3\sin(\theta)$, o que implica $dx = 3\cos(\theta)d\theta$. O termo do radicando simplifica-se para $\sqrt{9-9\sin^2(\theta)} = \sqrt{9\cos^2(\theta)} = 3\cos(\theta)$. Substituindo na integral:

$$\int \frac{9\sin^2(\theta)}{3\cos(\theta)}\cdot 3\cos(\theta)d\theta = 9\int \sin^2(\theta)d\theta$$

Aplicando a identidade de arco duplo $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$:

$$9\int \frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta = \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + C$$

Utilizando a identidade $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, reescrevemos o resultado como $\frac{9}{2}\theta - \frac{9}{2}\sin(\theta)\cos(\theta) + C$. Agora, retornamos à variável $x$ original sabendo que $\sin(\theta) = \frac{x}{3}$, o que implica $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$ e, por trigonometria do triângulo retângulo, $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + C = \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + C$$

3. **Substituição Simples:** $\displaystyle\int t\sqrt{5t^2+9}dt$

**Resolução:** Definimos a substituição com o termo interno da raiz: $u = 5t^2 + 9 \implies du = 10t\,dt \implies t\,dt = \frac{1}{10}du$. Substituindo os elementos correspondentes na integral:

$$\int \sqrt{u}\cdot\frac{1}{10}du = \frac{1}{10}\int u^{1/2}du = \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{15}u^{3/2} + C$$

Desfazendo a substituição para retornar à variável $t$:

$$\int t\sqrt{5t^2+9}dt = \frac{1}{15}(5t^2+9)^{3/2} + C$$

4. **Substituição Simples:** $\int \sin(x)e^{\cos(x)}dx$

   **Resolução:** Escolhemos para a substituição o expoente da função exponencial: $u = \cos(x) \implies du = -\sin(x)dx \implies -du = \sin(x)dx$. Ajustando a integral para a nova variável:

$$\int e^u(-du) = -\int e^u du = -e^u + C$$

   Substituindo de volta $u = \cos(x)$, alcançamos o resultado:

$$\int \sin(x)e^{\cos(x)}dx = -e^{\cos(x)} + C$$

---

**Questão 3** ***(Valor 2,0)*****:** Encontre a área da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, entre as retas $x = \frac{1}{9}$ e $x = 1$.

As funções $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ cruzam-se nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. No intervalo estabelecido $[1/9, 1]$, a função teto (superior) é dada por $y = \sqrt{x}$ e a função piso (inferior) é $y = x^2$, dado que $\sqrt{x} \geq x^2$ para qualquer $x \in [0, 1]$. A área $A$ calcula-se por meio da integral definida da diferença entre as duas funções:

$$A = \int_{1/9}^{1} (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right] 1/9^1$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo nos limites superior e inferior:

$$A = \left(\frac{2}{3}(1)^{3/2} - \frac{1}{3}(1)^3\right) - \left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{3/2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3\right)$$

Calculando os valores das potências: $(1)^{3/2} = 1$, $(1)^3 = 1$, $\left(\frac{1}{9}\right)^{3/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, e $\left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{1}{729}$.

$$A = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{27} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{729}\right) = \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{81} - \frac{1}{2187}\right)$$

Encontrando o mínimo múltiplo comum interno (2187): $\frac{2}{81} = \frac{2 \cdot 27}{2187} = \frac{54}{2187}$.

$$A = \frac{1}{3} - \left(\frac{54-1}{2187}\right) = \frac{1}{3} - \frac{53}{2187}$$

Igualando os denominadores globais ($2187 = 3 \cdot 729 \implies \frac{1}{3} = \frac{729}{2187}$):

$$A = \frac{729 - 53}{2187} = \frac{676}{2187}$$

---

**Questão 4** ***(Valor 2,0)*****:** Calcule a seguinte integral definida:

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x)\, dx$$

Calcule a seguinte integral definida: $\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x)dx$

**Resolução:** Primeiramente determinamos a integral indefinida associada por integração por partes de forma cíclica.

- *Primeiro passo:* Escolhe-se $u = \cos(x) \implies du = -\sin(x)dx$ e $dv = e^x dx \implies v = e^x$.

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin(x))dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)dx$$

- *Segundo passo:* Para a integral restante, definimos $\tilde{u} = \sin(x) \implies d\tilde{u} = \cos(x)dx$ e $d\tilde{v} = e^x dx \implies \tilde{v} = e^x$.

$$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

Substituindo o resultado do segundo passo na primeira igualdade:

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \cos(x) + \left(e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx\right)$$

Somando $\int e^x \cos(x)dx$ em ambos os lados e isolando o termo:

$$2\int e^x \cos(x)dx = e^x(\cos(x) + \sin(x)) \implies \int e^x \cos(x)dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2}$$

Uma vez encontrada a primitiva, aplicamos os limites definidos de 0 a $\pi/2$:

$$\left[\frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{e^{\pi/2}(\sin(\pi/2) + \cos(\pi/2))}{2} - \frac{e^0(\sin(0) + \cos(0))}{2}$$

Sabendo que $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ e $e^0 = 1$:

$$= \frac{e^{\pi/2}(1 + 0)}{2} - \frac{1 \cdot (0 + 1)}{2} = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$$