

Nome: _____ Cartão: _____

Q.1	Q.2	Q.3	Q.4	Q.5	Total

Questão 1 (Valor 4,0): Calcule a derivada primeira das funções dadas a seguir:

a) $f(x) = \cos^3\left(\frac{x}{x+1}\right)$

Utilizaremos a Regra da Cadeia consecutivamente. Seja $u(x) = \frac{x}{x+1}$. Primeiro, encontramos a derivada de $u(x)$ usando a Regra do Quociente:

$$u'(x) = \frac{(1)(x+1) - (x)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Agora, aplicando a Regra da Cadeia para a função externa exponencial e a função cosseno:

$$f'(x) = 3 \cos^2\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \left[-\sin\left(\frac{x}{x+1}\right)\right] \cdot u'(x)$$

$$f'(x) = -3 \cos^2\left(\frac{x}{x+1}\right) \sin\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} \cos^2\left(\frac{x}{x+1}\right) \sin\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

b) $f(x) = \sin(2x) \cos(3x)$

Utilizaremos a Regra do Produto: $(uv)' = u'v + uv'$, juntamente com a Regra da Cadeia para os argumentos das funções trigonométricas.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[\sin(2x)] \cdot \cos(3x) + \sin(2x) \cdot \frac{d}{dx}[\cos(3x)]$$

$$f'(x) = [2 \cos(2x)] \cdot \cos(3x) + \sin(2x) \cdot [-3 \sin(3x)]$$

$$f'(x) = 2 \cos(2x) \cos(3x) - 3 \sin(2x) \sin(3x)$$

c) $f(x) = \frac{\sin x \cos x \tan^3 x}{\sqrt{x}}$

Antes de aplicar o logaritmo, podemos simplificar a expressão lembrando que $\tan^3 x = \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}$:

$$f(x) = \frac{\sin x \cos x \cdot \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}}{x^{1/2}} = \frac{\sin^4 x}{x^{1/2} \cos^2 x}$$

Aplicando o logaritmo natural (ln) em ambos os lados:

$$\ln |f(x)| = \ln \left| \frac{\sin^4 x}{x^{1/2} \cos^2 x} \right|$$

$$\ln |f(x)| = 4 \ln |\sin x| - \frac{1}{2} \ln |x| - 2 \ln |\cos x|$$

Derivando implicitamente em relação a x :

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 4 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{2x} - 2 \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 4 \cot x + 2 \tan x - \frac{1}{2x}$$

Isolando dy/dx :

$$\frac{dy}{dx} = y \left(4 \cot x + 2 \tan x - \frac{1}{2x} \right)$$

$$f'(x) = \frac{\sin x \cos x \tan^3 x}{\sqrt{x}} \left(4 \cot x + 2 \tan x - \frac{1}{2x} \right)$$

d) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

Reescrevendo a função utilizando expoente fracionário:

$$f(x) = (x^3 + 1)^{1/2}$$

Aplicando a Regra da Cadeia:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 1)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(x^3 + 1)$$

Calculando a derivada do termo interno:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 1)^{-1/2} \cdot (3x^2)$$

Organizando os termos e retornando o expoente negativo para a forma de raiz no denominador:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}$$

Questão 2 (Valor 2,0): Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-4/3}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Ao avaliarmos o limite diretamente quando $x \rightarrow +\infty$:

- O numerador $x^{-4/3} = \frac{1}{x^{4/3}} \rightarrow 0$.
- O argumento do seno $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, logo $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \sin(0) = 0$.

Temos uma indeterminação do tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$. Aplicamos a **Regra de L'Hôpital**, derivando separadamente o numerador e o denominador:

$$\frac{d}{dx}[x^{-4/3}] = -\frac{4}{3}x^{-7/3}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -x^{-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Substituindo de volta no limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{4}{3}x^{-7/3}}{-x^{-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{3}x^{-7/3}}{x^{-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Simplificando as potências de x (pois $\frac{x^{-7/3}}{x^{-2}} = x^{-7/3-(-2)} = x^{-7/3+6/3} = x^{-1/3}$):

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{3}x^{-1/3}}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{3x^{1/3} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

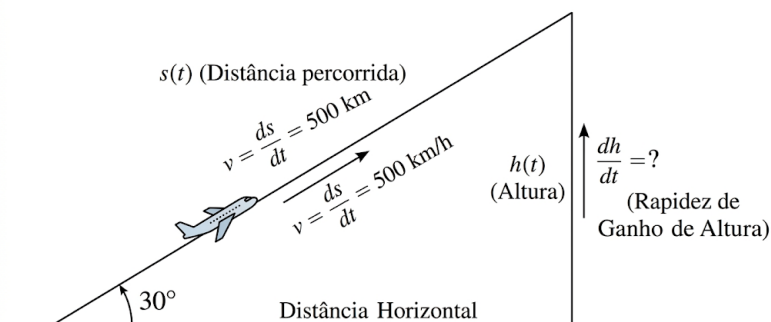
Avaliando o limite final:

$$\rightarrow \frac{4}{3(+\infty) \cos(0)} = \frac{4}{+\infty \cdot 1} = 0$$

Portanto, o limite é **0**.

Questão 3 (Valor 2,0): Um avião está subindo a um ângulo de 30° com a horizontal. Com que rapidez o avião estará ganhando altura se sua velocidade (taxa de variação) for de 500 km/h ?

Questão 3



Trata-se de um problema de taxas relacionadas. Seja $s(t)$ a distância percorrida pelo avião ao longo de sua trajetória de voo inclinada e $h(t)$ a altura vertical do avião em relação ao solo. O enunciado nos dá a velocidade na trajetória: $\frac{ds}{dt} = 500 \text{ km/h}$. Queremos encontrar a taxa de ganho de altura: $\frac{dh}{dt}$. Pela trigonometria do triângulo retângulo formado pela trajetória, solo horizontal e altura:

$$\sin(30^\circ) = \frac{h(t)}{s(t)} \implies h(t) = s(t) \cdot \sin(30^\circ)$$

Como $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, simplificamos para:

$$h(t) = \frac{1}{2}s(t)$$

Derivando ambos os lados em relação ao tempo t :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2} \frac{ds}{dt}$$

Substituindo o valor conhecido de $\frac{ds}{dt}$:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 500 = 250 \text{ km/h}$$

O avião estará ganhando altura a uma rapidez de **250 km/h**.

Questão 4 (Valor 2,0): Faça uma análise sobre o crescimento e decrescimento da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2,$$

Se possível, faça um **esboço** do gráfico.

Para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento, encontramos a primeira derivada $f'(x)$ e analisamos o seu sinal:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$

Encontrando os pontos críticos fazendo $f'(x) = 0$:

$$4x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

Fatorando o trinômio de segundo grau:

$$4x(x - 1)(x - 2) = 0$$

Os pontos críticos são $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$.

Estudando o sinal de $f'(x)$ nos intervalos delimitados pelos pontos críticos:

- **Intervalo $(-\infty, 0)$:** Para $x = -1 \implies f'(-1) = 4(-1)(-2)(-3) = -24 < 0 \rightarrow$ **Decrescente.**
- **Intervalo $(0, 1)$:** Para $x = 0,5 \implies f'(0,5) = 4(0,5)(-0,5)(-1,5) = 1,5 > 0 \rightarrow$ **Crescente.**
- **Intervalo $(1, 2)$:** Para $x = 1,5 \implies f'(1,5) = 4(1,5)(0,5)(-0,5) = -1,5 < 0 \rightarrow$ **Decrescente.**
- **Intervalo $(2, +\infty)$:** Para $x = 3 \implies f'(3) = 4(3)(2)(1) = 24 > 0 \rightarrow$ **Crescente.**

Síntese dos Intervalos:

- **Crescente:** $(0, 1) \cup (2, +\infty)$
- **Decrescente:** $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$

